# Алгебра та теорія чисел
# Група 321
# Викладач Котова О.
# Тема: Алгебраїчні та трансцендентні числа. Трансцендентність чисел e та $\pi$ (6 год.)

План

# ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Поняття раціональності та ірраціональності дуже істотно характеризують будову дійсного числа. Так, наприклад, раціональні числа і тільки вони наскладаються в періодичні десяткові дроби (скінченні десяткові дроби розглядаються при цьому як періодичні десяткові дроби з періодом 0) і в скінченні неперервні дроби. Ірраціональні числа і тільки вони розкладаються в нескінченні неперіодичні десяткові дроби і в нескінченні неперервні дроби.

Зазначені факти можуть, очевидно, бути критеріями для визначення раціональності чи ірраціональності заданого дійсного числа, але не завжди ці критерії можна безпосередньо застосовувати.

Наведемо деякі інші критерії раціональності й ірраціональності заданих дійсних чисел. При цьому зауважимо, що доведення ірраціональності будь-якого дійсного числа $\alpha$ можна звести до доведення того, що нема цілих чисел *a* і *b*, таких, що $b_{\alpha} = a$. [5, с. 197]

***Теорема 1.1.*** Якщо $N$ і $k$ – натуральні числа, причому $N$ не є $k$ -тим степенем цілого числа, то $\sqrt[k]{N}$ – число ірраціональне.

Припустимо супротивне, тобто, що $\sqrt[k]{N} = \frac{a}{b}$ – число раціональне, (*a, b*) = 1 і $b > 1$ (інакше *N* було $k$ –тим степенем цілого числа *a*). Тоді $a^k = b^k N$, звідки $a^k \vdots b^k$ і $a^k \vdots p$, де *p* – простий дільник числа *b*. Але в такому разі *a* також має ділитися на *p* і тоді (*a, b*) = *p* > 1, що суперечить умові (*a, b*) = 1. Отже теорема доведена.

Ця теорема еквівалентна твердженню, що рівняння нерозв’язне в цілих взаємно простих числах.

***Теорема 1.2.*** Якщо $\alpha$ – дійсний корінь рівняння

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \quad (1)$$

з цілими коефіцієнтами і з старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, то $\alpha$ будь-яке ціле або ірраціональне число.

При доведенні обмежимось випадком, коли $c_n \neq 0$. Припустимо супротивне: $\alpha$ не є ірраціональним числом, а раціональним дробом, тобто $\alpha = \frac{a}{b}$, ($a$, $b$) = 1 і $b$ > 1; підставляючи в многочлен (1), дістанемо: $a^n + c_1 a^{n-1} b + ... + c_n b^n = 0$ або $a^n = -b(c_1 a^{n-1} + ... + c_n b^{n-1})$.

З останньої рівності випливає, що $a^n \vdots b$, тобто ми прийшли до суперечності.

Теорема 2 твердить, що дійсне число $\alpha$, неявно визначене рівнянням (1), не будучи цілим числом є число ірраціональне, при цьому з алгебри відомо, що цілі розв'язки рівняння (1) слід шукати серед дільників вільного члена $c_n$.

Для деяких дійсних чисел питання про раціональність чи ірраціональність з'ясовуємо за допомогою таких двох теорем.

***Теорема 1.3.*** Для всякого раціонального числа $\alpha$ існує таке додатне число $c$, що нерівність

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{c}{b^n} \qquad (2)$$

виконується для будь-якого раціонального дробу $\frac{a}{b} \neq \alpha$.

Справді, нехай $\alpha = \frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$ (так що $pb - aq \neq 0$) і $q \geq 1$. Тоді

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|pb - aq|}{bq} \geq \frac{1}{bq} = \frac{\frac{1}{q}}{b} = \frac{c}{b}$$

де $c = \frac{1}{q} > 0$, і нерівність (2) доведена.

У теоремі 3 міститься необхідна ознака раціонального числа. Число, яке не задовольняє цю ознаку має бути ірраціональним, і ми приходимо до такої теореми.

***Теорема 1.4.*** Якщо для будь-якого додатного $c$ можна знайти хоча б одну пару цілих чисел таких $a$ і $b$, що

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b}, \quad (3)$$

то $\alpha$ ірраціональне.

Справді, якщо $\alpha$ було б раціональним, то існувало б таке $c > 0$, що для зазначеного дробу $\frac{a}{b}$ виконувалася б нерівність (2), і тоді для цього $c$ не могла б виконуватись нерівність (3). Отже, $\alpha$ – ірраціональне число і теорему доведено.

*Приклад.* Довести ірраціональність числа $\alpha$:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^9} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^{n^2}} + \ldots$$

Візьмемо довільне $c > 0$ і $n$ велике, що $2^{2n+1} > \frac{1}{c}$. Покладемо

$$b = 2^{n^2}, a = 2^{n^2}\left[1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^{n^2}}\right].$$

Тут $a$ і $b$ – цілі числа. При таких $a$ і $b$

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{1}{2^{(n+1)^2}} - \frac{1}{2^{(n+2)^2}} + \ldots\right| < \frac{1}{2^{(n+1)^2}} = \frac{1}{b2^{2n+1}} < \frac{c}{b}.$$

Тобто за теоремою 4 $\alpha$ – ірраціональне число.

Теорему 4 можна застосувати і для доведення ***ірраціональності числа e*** [5, с. 199]. Але ще простіше скористатися таким міркуванням.

Припустимо супротивне, тобто припустимо, що $e$ – раціональне число, а саме $e = \frac{a}{b}$, де $a$ і $b$ цілі, і розглянемо при $k \geq b$ вираз

$$c = k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{k!}\right).$$

Оскільки при $k \geq b$ добуток $k!$ ділиться на $b$, то $c$ повинно бути цілим числом (оскільки $k!\ e$ – ціле, а інші доданки в дужках при множенні на $k!$ також дають цілі числа). Але, з другого боку, оскільки $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots,$ то

$$0 < c = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots < \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots = \frac{1}{k}.$$

тобто $c$ – дробове число. Знайдена суперечність і доводить ірраціональність числа $e$.

Ірраціональність числа π довести значно складніше. Наведемо одне з доведень ***ірраціональності числа π*** [5, с. 199].

Припустимо супротивне, тобто, що π раціональне і $\pi = \frac{a}{b}$, де $a$ і $b$ – цілі. Розглянемо многочлени

$$f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \quad (4)$$

$$F(x) = f(x) - f^{\mathrm{II}}(x) + f^{\mathrm{IY}}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \quad (5)$$

Оскільки $x$ входить у чисельник многочлена $f(x)$ з показниками від $n$ до $2n$, то $f(x)$ можна записати в такому вигляді: $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} a_{i-n} x^i$ , звідки видно, що $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ і що в похідній $f^{(k)}(x)$, $n \le k \le 2n$ при $x = 0$ зберігається лише доданок, утворений членом многочлена $f(x)$, який містить $x^k$. Тому $f^k(0) = \frac{k!}{n!} a_{k-n}$. Отже, для $0 \le j \le 2n$, $f^j(0)$ – ціле число, оскільки, очевидно, що $a_{j-n}$ – числа цілі. Але з рівності (4) дістанемо:

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left[a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right]^n}{n!} = f(x).$$

Отже, при будь-якому $j$, $f^{(j)}(x) = f^{(j)}(\pi - x)$ і $f^{(j)}(\pi) = f^{(j)}(0)$ – також ціле число. Тому $F(0)$ і $F(\pi)$ – цілі числа.

Ураховуючи тепер, що з

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

випливає

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\sin x = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0),$$

приходимо до висновку: $I$ – число ціле, притому додатне, бо в інтервалі (0, π) підінтегральна функція додатна. Але для $0 < x < \pi$ з рівності (4) матимемо: $f(x)\sin x < \dfrac{\pi^n a^n}{n!}$. Остання нерівність показує, що для досить великих $n$ підінтегральна функція, а разом з тим і сам інтеграл можуть стати як завгодно малими. Ця суперечність і доводить ірраціональність числа π.

# АЛГЕБРАЇЧНІ ЧИСЛА

## 2.1. Алгебраїчні числа та їх властивості. Поле алгебраїчних чисел

Комплексне або дійсне число $\alpha$ називається ***алгебраїчним числом***, якщо воно є коренем деякого многочлена з раціональними коефіцієнтами. Тобто число $\alpha \in C$ є алгебраїчним, якщо існує многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, де $a_k \in Q$ і $f(\alpha) = 0$.

У даному визначенні можна було вимагати, щоб коефіцієнти многочлена були цілими числами. Тобто якщо $\alpha$ – алгебраїчне число, то воно буде коренем навіть деякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами.

Будь-яке неалгебраїчне число називається ***трансцендентним***.

Припустимо, що $p(x) = 0$ є рівняння найнижчого степеня серед усіх алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, що мають $\alpha$ своїм коренем. Важно побачити, що тоді многочлен $p(x)$, який є лівою частиною цього рівняння, буде *незвідним* над полем раціональних чисел і визначатиметься однозначно з точністю до сталого множника, відмінного від нуля. Тобто, якщо $\alpha$ – алгебраїчне число, то серед всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами, для яких $\alpha$ є коренем, існує єдиний многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом, рівним одиниці, тоді такий многочлен називається ***мінімальним многочленом*** алгебраїчного числа $\alpha$.

Справді, перше твердження відразу ж випливає з того, що $p(x) = 0$ є рівняння найменшого степеня, коренем якого є число $\alpha$.

Для доведення однозначності $p(x)$ припустимо, що $\alpha$ є також коренем незвідного над полем раціональних чисел рівняння $q(x) = 0$ з цілими коефіцієнтами. Тоді многочлени $p(x)$ і $q(x)$ ділитимусь на $x - \alpha$. Отже, матимуть найбільший спільний дільник $d(x)$, вищий від нульового степеня, який, як відомо, не залежить від того, чи розглядаємо ми многочлени над даним полем *P*, чи над будь-яким його розширенням $\overline{P}$. Внаслідок незвідності многочлени $p(x)$ і $q(x)$ збігаються з $d(x)$ з точністю до сталого множника, який не дорівнює нулю, а тому $p(x)$ і $q(x)$ також відрізнятимуться один від одного тільки сталим множником, відмінним від нуля.

Якщо $n$ – степінь незвідного над полем $R$ рівняння $p(x)=0$ з цілими коефіцієнтами, то корінь $\alpha$ з цього рівняння називається ***алгебраїчним числом степеня n***; усі корені цього рівняння, відмінні від $\alpha$, називаються ***спряженими*** з $\alpha$. Очевидно, що степінь спряжених алгебраїчних чисел один і той самий.

***Висотою*** *H* алгебраїчного числа $\theta$ називається максимальний з модулів коефіцієнтів того незвідного у полі раціональних чисел рівняння, яке задовольняється $\theta$, коли всі коефіцієнти цього рівняння цілі і їхній найбільший спільний дільник дорівнює одиниці [5, с. 215].

До алгебраїчних чисел належать усі раціональні числа як корені рівнянь першого степеня: $ax=b(a\neq 0)$ з цілими (раціональними) коефіцієнтами, а також будь-який радикал виду $\sqrt[n]{a}$, де є $a$ раціональне, як корінь двочленного рівняння: $x^n-a=0$.

Дійсно,число $\frac{a}{b}$ є алгебраїчним, так як є коренем рівняння $bx-a=0$.

Також значення кореня будь-якого степеня з раціонального числа є алгебраїчним числом, адже $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, де *a, b* і *n* натуральні числа, являється коренем рівняння $bx^n-a=0$.

Раціональні числа, і лише вони, є алгебраїчними числами 1-го степеня.

Уявна одиниця $i$ так само як $\sqrt{2}$ є алгебраїчним числом 2-го степеня. Спряженими до цих чисел є відповідно $-i$ та $-\sqrt{2}$.

$\sqrt[3]{2}$ – алгебраїчне число 3-го степеня, тобто кубічна ірраціональність. Дійсно, це число є коренем многочлена 3-го степеня з цілими коефіцієнтами

$x^3 - 2 = 0$ і $\sqrt[3]{2}$ не є коренем якого-небудь многочлена 1-го чи 2-го степеня з цілими коефіцієнтами.

Існують й інші алгебраїчні числа, ніж вказані вище.

*Приклад*:

Число $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (1) є числом алгебраїчним.

*Доведення*:

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності (1) отримаємо

$$a^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3$$

звідки

$$a^2 = 2\sqrt{6} + 5$$

$$a^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

знову піднесемо ліву і праву частини рівності до квадрату, отримаємо

$$a^4 - 10a^2 + 25 = 24$$

звідки можна зробити висновок, що число $a$ є коренем наступного рівняння:

$$a^4 - 10a^2 + 1 = 0.$$

Якщо число є коренем многочлена зі старшим коефіцієнтом рівним одиниці, то це число називається цілим алгебраїчним числом.

Уявна одиниця, число $i = \sqrt{-1}$ є алгебраїчним, оскільки вона є коренем рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Числа e, π, $e^{\pi}$ не є алгебраїчними. Статус числа $e^{\pi}$ невідомий.

Якщо $\alpha \neq 0{,}1, \beta \notin Q$ – алгебраїчні числа, тоді $\alpha^{\beta}$ – трансцендентне число.

Числа $\cos 1$ і $\sin 1$ є алгебраїчними (кути в радіанах).

Цей факт випливає з тригонометричної рівності:

$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n-1)\theta)$$

Тому якщо визначити послідовність многочленів:

$$g_{n+1}(x) = 2g_n(x)x - g_{n-1}(x),$$

то $\cos(m\theta) = g_m(\cos\theta), m \in N$.

Звідси одержуємо:

$0 = \cos(90 \cdot 1) = g_{90}(\cos 1)$, тобто $\cos 1$ є коренем многочлена $g_{90}(x)$, що й доводить твердження.

Для $\sin 1$ достатньо зазначити, що всі степені $x$ в $g_{90}(x)$ є парними і що $\cos 1 = \sqrt{1 - \sin^2 1}$.

Всяке раціональне число як корінь рівняння першого степеня не має спряжених чисел, відмінних від нього, і ця властивість є для раціональних чисел характерною. Всяке алгебраїчне число, яке не є раціональним, буде коренем незвідного многочлена (рівняння), степінь якого більший від одиниці, і тому для нього існують спряжені числа, відмінні від його самого.

Тепер вкажемо основні *властивості алгебраїчних чисел* [5, с. 202].

***Властивість 1***. *Сума, різниця, добуток і частка алгебраїчних чисел є числа алгебраїчні. Інакше кажучи, сукупність усіх алгебраїчних чисел утворює поле, яке є підполем поля комплексних чисел.*

Справді, нехай дано алгебраїчні числа $\alpha$ і $\beta$ відповідно степеня $n \geq 1$ і $m \geq 1$. Позначимо через $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, ..., \alpha_n$ усі числа, спряжені з $\alpha$, через $\beta_1 = \beta, \beta_2, ..., \beta_m$ – усі числа, спряжені з $\beta$, через $f(x)$ і $g(x)$ – незвідні многочлени з раціональними коефіцієнти, що мають своїми коренями відповідно $\alpha$ і $\beta$. Очевидно, що многочлен $f(x) \cdot g(x)$ також має раціональні коефіцієнти і його коренями є

$$\gamma_1 = \alpha_1, ..., \gamma_n = \alpha_n, \gamma_{n+1} = \beta_1, ..., \gamma_{n+m} = \beta_m.$$

Складемо тепер многочлен, коренями якого є всі можливі суми $\gamma_i + \gamma_j$, де $i \neq j$ і $j = 1, 2, ..., m+n$. Це буде, очевидно, многочлен:

$$F(x) = \prod_{i,j=1}^{m+n} [x - (\gamma_i + \gamma_j)].$$

Коефіцієнти цього многочлена не змінюватимуться при переставлянні чисел $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+m}$, отже, вони будуть симетричними многочленами від $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+m}$. Звідси, внаслідок основної теореми про симетричні многочлени, випливає, що коефіцієнти многочлена $F(x)$ є многочленами від основних симетричних многочленів $\sigma_1 = \gamma_1 + ... + \gamma_{n+m}, ..., \sigma_{n+m} = \gamma_1\gamma_2...\gamma_{n+m}$ над тим самим полем раціональних чисел, які з точністю до знака є коефіцієнтами многочлена $f(x) \cdot g(x)$. Отже, коефіцієнти многочлена $F(x)$ будуть раціональними числами, і тому число $\alpha + \beta = \gamma_1 + \gamma_{n+1}$, яке є одним з його коренів, буде алгебраїчним.

Так само за допомогою многочлена $G(x) = \prod_{i,j=1}^{m+n} (x - \gamma_i\gamma_j)(i \neq j)$ доводиться алгебраїчність числа $\alpha\beta$.

Далі легко переконатись, що разом з $\beta$ буде алгебраїчним числом і $-\beta$. Для цього, припускаючи, що у многочлені $g(x)$ $x = -y$, дістанемо, очевидно, многочлен з раціональними коефіцієнтами, коренем якого буде $-\beta$, тобто $-\beta$ буде алгебраїчним числом, а тому $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$, за доведеним, буде числом алгебраїчним.

Нарешті, покладемо, що $\beta \neq 0$ є коренем рівняння

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m = 0 (b_0 \neq 0).$$

Припускаючи, що $x = \frac{1}{y}$, дістанемо рівняння з раціональними коефіцієнтами:

$$b_my^m + b_{m-1}y^{m-1} + ... b_1y + b_0 = 0,$$

яке має корінь $\frac{1}{\beta}$. Отже, $\frac{1}{\beta}$ є алгебраїчне число, а тому і $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ буде числом алгебраїчним. Отже, наше твердження доведено повністю.

***Наслідок.*** *Сукупність усіх дійсних алгебраїчних чисел утворює поле, яке, в свою чергу, є підполем поля всіх алгебраїчних чисел.*

З цієї властивості випливає, що будь-яка сума раціонального числа і радикала з раціонального числа, наприклад $7 + \sqrt[5]{3}$, а також будь-яка сума радикалів, наприклад $\sqrt[3]{2} + \sqrt[8]{7}$, будуть алгебраїчними числами. І взагалі, *будь-яка комбінація простих радикалів з раціональних чисел і раціональних чисел, добута внаслідок застосування скінченного числа дій додавання, віднімання, множення і ділення, є числом алгебраїчним.* Наприклад, число $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[7]{5}}{\sqrt[11]{4}\cdot\sqrt[5]{2}-2}$ буде алгебраїчним. Проте ми поки що не можемо стверджувати алгебраїчності чисел, які записують у вигляді «багатоповерхових» (складних) радикалів, наприклад, числа $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$. Це випливає лише з такої властивості:

***Властивість 2.*** *Якщо $\omega$ – корінь рівняння,*

$$\varphi(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+...+\alpha_n=0(n\geq 1),$$

*коефіцієнти якого є алгебраїчними числами, то $\omega$ також буде алгебраїчним числом.*

Справді, ми можемо вважати, що $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ є коренями одного й того самого многочлена $h(x)=\varphi_1(x)...\varphi_n(x)$ з раціональними коефіцієнтами, де $\varphi_i(x)(i=1,2,...,n)$ є многочлен, коренем якого є $\alpha_i$. Взагалі, степінь $m$ многочлена $h(x)$ може бути більший від $n$, або $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ можуть і не вичерпувати всіх коренів многочлена $h(x)$. Тому позначимо всі корені многочлена $h(x)$ через $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m(m\geq n)$, серед них, звичайно, будуть $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, і складемо допоміжний многочлен:

$$H(x)=\prod_{i_1,...,i_n}(x^n+\gamma_i,x^{n-1}+...+\gamma_{i_n}), \quad (2)$$

де кожний з індексів $i_1,i_2,...,i_n$ пробігає значення 1, 2, 3, …, $m$ і $i_1,i_2,...,i_n$ попарно різні. Так само, як і при доведенні властивості 1, робимо висновок, що коефіцієнти многочлена $H(x)$ є симетричні многочлени від $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ над полем раціональних чисел, а тому, згідно з основною теоремою про симетричні многочлени, вони є раціональними числами. Оскільки $\varphi(x)$ є, очевидно, одним з множників добутку (2), то $\omega$ буде коренем многочлена

*H(x)* з раціональними коефіцієнтами. Отже $\omega$ – алгебраїчне число. Цим теорему доведено.

Застосуємо цю властивість до числа $\omega = \sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$. Число $\alpha = 2+\sqrt[3]{3}$ згідно з властивістю 1 алгебраїчне, а тому й число $\omega$ буде алгебраїчне, як корінь многочлена $x^2 - \alpha$ з алгебраїчними коефіцієнтами (властивість 2). Взагалі, застосовуючи кілька разів властивості 1 і 2, прийдемо до такого висновку:

*Усяке число, яке записується в радикалах над полем раціональних чисел R (тобто число, яке становить як завгодно складну скінченну комбінацію радикалів (тут мається на увазі 4 арифметичні дії над радикалами, піднесення до степеня і добування кореня з раціональним показником, проте, наприклад, комбінація* $2^{\sqrt{2}}$ *буде неалгебраїчним числом), в загальному випадку «багатоповерхових»), буде алгебраїчним числом.*

Алгебраїчні числа, які записуються в радикалах, утворюють, очевидно, *поле*. Це поле буде, звичайно, тільки частиною поля всіх алгебраїчних чисел. До нього, зокрема, не ввійдуть ті алгебраїчні числа, які є коренями рівнянь з раціональними коефіцієнтами, що не розв'язуються в радикалах.

У вищій алгебрі числове поле *P* називається ***алгебраїчно замкненим***, якщо будь-який многочлен з коефіцієнтами з *P* має в самому полі *P* стільки коренів, який його степінь. Отже, властивості 1 і 2 алгебраїчних чисел означають, що *множина всі алгебраїчних чисел утворює алгебраїчно замкнене поле.*

А також виділимо такі *властивості*:

- Множина алгебраїчних чисел є щільною в комплексній площині.
- Для довільного алгебраїчного числа $\alpha$ існує таке натуральне *N*, що $N_\alpha$ – ціле алгебраїчне число.
- Алгебраїчне число $\alpha$ степеня *n* має *n* різних спряжених чисел (включаючи саме число $\alpha$ ).

- $\alpha$ і $\beta$ спряжені тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм поля A, що переводить $\alpha$ у $\beta$.

**2.2. Раціональні наближення алгебраїчних чисел**

В певному розумінні алгебраїчні числа, що не є раціональними не можуть бути достатньо добре наближені раціональними числами. Результати, що прояснюють суть цього твердження [6, с. 264]:

***Теорема Ліувілля.*** Для довільного дійсного числа $\alpha$, степінь якого рівний *n*, існує додатне число $c$ залежне від $\alpha$, таке, що для усіх раціональних чисел $\frac{a}{b}$ $\left(\frac{a}{b} \neq \alpha\right)$ буде мати місце нерівність $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{c}{b^n}$.

Уточнення теореми Ліувілля зробив в 1908 р. норвезький математик А. Туе (1863 – 1922 рр.), довівши теорему:

***Теорема 2.1 (Туе).*** Для всякого алгебраїчного числа $\alpha$ степеня $n \geq 3$ нерівність $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b^n}$ допускає при будь-якому $c > 0$ лише скінченне число розв'язків у цілих числах $a$ і $b > 0$.

Доведення цієї теореми, на відміну від теореми Ліувілля, потребувало дуже тонких міркувань.

Дальші результати в цьому напрямі дістали К. Зігель, А. О. Гельфонд та ін. Найточнішу оцінку нерівності в теоремі 1 дістав у 1955 р. англійський математик Рот.

***Теорема Туе – Зігеля – Рота.*** Нехай $\alpha$ – алгебраїчне число степеня $n \geq 2$; тоді при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує лише скінченне число раціональних дробів $\frac{a}{b}$, таких, що $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{2+\varepsilon}}$.

З цієї теореми випливає, що для будь-якого алгебраїчного числа $\alpha$ степеня $n \geq 2$ і довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $c$ > 0, що для будь-якого раціонального дробу $\frac{a}{b}$ справджуватиметься рівність: $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b^{2+\varepsilon}}$ .

Користуючись цієї теоремою можна довести таку теорему.

***Теорема 2.2 (Туе).*** Якщо $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n (a_0 \neq 0)$ незвідний у полі раціональних чисел многочлен з цілими коефіцієнтами степеня $n \geq 3$ і $m$ є ціле число, то невизначене рівняння

$$g(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = m$$

або нерозв’язне, або має скінчену множину розв’язків у цілих числах.

Цей результат Туе є одним з небагатьох тверджень, встановлених для невизначених рівнянь вищих степенів.

# РОЗДІЛ 3.
# ТРАНСЦЕНДЕНТНІ ЧИСЛА

## 3.1. Теорема Ліувілля. Трансцендентні числа. Побудова трансцендентних чисел

Як ми вже зазначили, довільне число $\omega$, яке не є алгебраїчним, називається ***трансцендентним***, тобто інакше кажучи, комплексне (зокрема дійсне) число $\omega$ називається ***трансцендентним***, якщо воно не є коренем жодного алгебраїчного рівняння степеня $n \geq 1$ з раціональними коефіцієнтами [5, с. 205].

З цього означення випливає, що дійсне трансцендентне число повинно бути ірраціональним. Обернене твердження неправильне. Наприклад, $\sqrt{2}$ – ірраціональне число, але воно, як бачили вище, не трансцендентне: воно є коренем многочлена $x^2 - 2 = 0$.

Усередині минулого століття було дано конструктивне доведення існування трансцендентних чисел.

Ліувілль довів таку теорему.

***Теорема 3.1 (Ліувілля).*** Якщо $\alpha$ – дійсне алгебраїчне число степеня $n \geq 2$, то для будь-якої пари чисел $a$ і $b > 0$ справедлива нерівність $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^n}$, де $C$ – додатна стала, яке не залежить від $a$ та $b$.

Справді, припустимо, що $\alpha$ є дійсний корінь многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \, (a_0 \neq 0)$ з цілими коефіцієнтами, незвідного в полі раціональних чисел. За теоремою Безу, многочлен *f(x)* повинен ділитись на $x - \alpha$; позначаючи через $f_1(x)$ частку від цього ділення, дістанемо: $f(x) = (x - \alpha) f_1(x)$, де $f_1(x)$ – многочлен ($n$ – 1)-го степеня з дійсними алгебраїчними коефіцієнтами. Припускаючи, що $x = \frac{a}{b}$, дістанемо

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}-\alpha\right)f_1\left(\frac{a}{b}\right),$$

звідси

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|=\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\cdot\left|f_1\left(\frac{a}{b}\right)\right|. \quad (1)$$

З другого боку, через те що *f(x)* незвідний у полі раціональних чисел, то він не може мати раціональних коренів, тому

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|=\frac{\left|a_0a^n+a_1a^{n-1}b+...+a_nb^n\right|}{b^n}\neq 0;$$

чисельник останнього дробу є цілим числом, але не дорівнює нулю. Значить, абсолютна величина чисельника не менша від 1 і $\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|\geq\frac{1}{b^n}$.

Отже, замінюючи у лівій частині рівності (1) $\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|$ величиною $\frac{1}{b^n}$, дістанемо нерівність: $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\cdot\left|f_1\left(\frac{a}{b}\right)\right|\geq\frac{1}{b^n}$; (2)

якщо $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|>1$, то й поготів $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|>\frac{1}{b^n}$. (3)

Тому залишається розглянути тільки такі пари чисел *a* і *b*, для яких

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\leq 1. \quad (4)$$

Легко побачити, що для таких пар *a, b* дріб $\frac{a}{b}$ обмежений (тобто $\left|\frac{a}{b}\right|\leq M$, де *M* – деяка додатна стала (яка не залежить від чисел *a* і *b*), що задовольняє умову (4); справді, через те, що $\left|\frac{a}{b}\right|-|\alpha|\leq\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|$, то й поготів $\left|\frac{a}{b}\right|-|\alpha|\leq 1$, звідси $\left|\frac{a}{b}\right|\leq|\alpha|+1$, тобто роль сталої *M* відіграє $|\alpha|+1$), але оскільки $f_1(x)$ –

неперервна в сегменті $[\alpha-1,\alpha+1]$, то, отже на цьому сегменті $f_1(x)$ буде обмеженою, тобто $\left|f_1\left(\frac{a}{b}\right)\right| < N$, де $N$ є деяка додатна стала.

Отже, нерівність (2) можна підсилити, замінивши $\left|f_1\left(\frac{a}{b}\right)\right|$ більшою величиною $N$: $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|N > \frac{1}{b^n}$, звідки $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| > \frac{1}{Nb^n}$, (5)

якщо $a$ і $b$ задовольняють умову (4). Припускаючи тепер, що $C$ дорівнює найменшому з чисел 1 і $\frac{1}{N}$, згідно з нерівностями (3) і (5), дістанемо, що

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^n}$$

для всіх цілих $a$ і $b > 0$ та сталої $C$, яка не залежить від $a$ і $b$, це й доводить нашу теорему.

Теорема Ліувілля показує, що наближення будь-якого алгебраїчного числа обмежене знизу.

За допомогою теореми Ліувілля можна довести існування трансцендентних чисел.

***Теорема 3.2.*** Нехай $\omega$ – дійсне число. Якщо для будь-якого натурального $n \geq 1$ і будь-якого дійсного $C > 0$ хоча б один раціональний дріб $\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} \neq \omega\right)$ такий, що $\left|\omega-\frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^n}$ (6), то $\omega$ – трансцендентне число.

Справді, якби $\alpha$ було алгебраїчним, то за теоремою Ліувілля і теоремою 3 Розділу 1 знайшлися б натуральне $n$ і дійсне $C > 0$ такі, що для будь-якого дробу $\frac{a}{b}$ було б

$$\left|\omega-\frac{a}{b}\right| \geq \frac{C}{b^n}. \quad (6)$$

Це суперечить тому, що згідно з умовою теореми для цих $n$ і $C$ існує дріб $\frac{a}{b}$ такий, що справджується нерівність (6). Припущення, що $\omega$ – алгебраїчне, привело нас до суперечності, отже, $\omega$ – трансцендентне число.

Числа $\omega$, для яких при будь-яких $n \geq 1$ і $c > 0$ нерівність (6) має розв'язок у цілих $a$ і $b$, називаються ***трансцендентними числами Ліувілля*** [5, с. 208].

***Теорема 3.3.*** Трансцендентні числа існують.

Справді, припустимо, що $q_0$ і $q_1$ – довільні цілі додатні числа. Утворимо неповні частки за таким правилом:

$$q_2 < Q_1, q_3 < Q_2^2, q_4 < Q_3^3, ..., q_{k+1} < Q_k^k, ...$$

Оскільки $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$, то $q_2$ вибираємо так, щоб $q_2 < q_1 = Q_1$. Знаючи $q_0$, $q_1$, $q_2$, обчислюємо $\frac{P_2}{Q_2}$ і вибираємо $q_3$ так, щоб $q_3 < Q_2^2$ і т. д.

Покажемо, що нескінченний неперервний дріб $\omega = [q_0; q_1, q_2, ...]$ визначає трансцендентне число $\omega$. Припустимо супротивне, тобто нехай $\omega$ – алгебраїчне число степеня $n \geq 2$,

$$\left| \omega - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} = \frac{1}{Q_k (Q_k q_{k+1} - Q_{k-1})} < \frac{1}{Q_k^2 q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^{k+2}},$$

бо $q_{k+1} > Q_k^k$ за умовою.

Але, за теоремою Ліувілля, таке додатне число $C$, що $\left| \omega - \frac{a}{b} \right| > \frac{C}{b^n}$ при будь-яких цілих $a$ і $b > 0$. Зокрема, $\left| \omega - \frac{P_k}{Q_k} \right| > \frac{C}{Q_k^n}$ при будь-якому натуральному $k$.

Оскільки $\frac{1}{Q_k^{k+2}} > \left| \omega - \frac{P_k}{Q_k} \right| > \frac{C}{Q_k^n}$, то $\frac{1}{Q_k^{k+2}} > \frac{C}{Q_k^n}$ і при $k \geq n \frac{1}{Q_k^2} > C$, але $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{Q_k^2} = 0$ і при досить великому $k \frac{1}{Q_k^2} < C$.

Ця суперечність говорить про те, що не може бути алгебраїчним числом степеня $n \geq 2$. Але $\omega$ не може бути і раціональним числом (тобто алгебраїчним першого степеня); отже, $\omega$ – число трансцендентне. Цим ми не тільки довели теорему, а й вказали на метод побудови трансцендентних чисел Ліувілля. Клас чисел, які дістаємо таким способом, цікавий як історичний приклад конкретного задання явно трансцендентних чисел.

Як приклад розглянемо трансцендентне число, задане десятковим розкладом.

*Приклад.* Число

$$\omega = \frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \ldots = 0, a_1 a_2 000 a_3 00000000000000000 a_4 00\ldots$$

де $a_i$ позначають довільні цифри від 1 до 9 (найпростіше припустити, що всі $a_i$ дорівнюють 1) будуть трансцендентними.

Справді, візьмемо довільні натуральне *n* і дійсне *C* > 0. Припустимо $a^{k!}\left(\frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \ldots + \frac{a_k}{10^{k!}}\right), b = 10^{k!}$, де *k* вибрано таким великим, що $10^{(k-1)!} \geq \frac{2}{C}$ і $k > n$, тоді

$$\left|\omega - \frac{a}{b}\right| = \frac{a_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \frac{a_{k+2}}{10^{(k+2)!}} + \ldots < \frac{10}{10^{(k+1)!}} + \frac{10}{10^{(k+2)!}} + \ldots < \frac{1}{10^{(k+1)!-1}} +$$

$$+ \frac{1}{10^{(k+2)!-1}} + \ldots < \frac{1}{10^{k!}} + \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \ldots < \frac{1}{10^{k!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \frac{2}{10^{k!}} =$$

$$= \frac{2}{10^{(k-1)!}} \cdot \frac{1}{10^{(k-1)!(k-1)}} \leq \frac{C}{b^n}.$$

Оскільки для довільних натурального *n* і дійсного *C* > 0 ми підібрали дріб $\frac{a}{b}$ такий, що $\left|\omega - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^n}$, то $\omega$ – трансцендентне число.

### 3.2. Сучасний стан питання про трансцендентні числа. Трансцендентність чисел е та π

Через 20 – 25 років після досліджень Ліувілля німецький математик Георг Кантор (1845 – 1918) дав просте і оригінальне доведення існування трансцендентних чисел, яке ґрунтується зовсім на інших принципах. Він показав, що множина всіх дійсних алгебраїчних чисел є зчисленною множиною, а множина всіх дійсних чисел незчисленна. Звідси випливає, що є незчисленна множина дійсних неалгебраїчних, тобто трансцендентних чисел. Слід зазначити, що доведення Кантора не дає можливості побудувати будь-яке конкретне трансцендентне число. З цього випливає погляду доведення існування трансцендентних чисел Ліувілля є ефективнішим.

У 1873 р. французькому математику Ерміту вдалося встановити трансцендентність числа *е.* Доведення трансцендентності числа *е* з використанням інтеграла $\int_0^x e^{-t} f(t)dt$, де *f(t)* – многочлен, можна аналогічно доведенню ірраціональності числа π.

У 1873 р. німецький математик Ліндеман, користуючись методом Ерміта, довів трансцендентність  числа π. Цим самим було доведено неможливість розв’язання славнозвісної проблеми квадратури круга, тобто неможливість побудувати за допомогою циркуля й лінійки, квадрата, рівновеликого кругу з радіусом, що дорівнює одиниці, або, що те саме, – відрізка завдовжки π. До цієї задачі зводиться також задача про спрямлення кола.

Взагалі, Ліндеман довів загальніше припущення, з якого відразу ж випливає трансцендентність числа π.

***Теорема Ліндемана.*** Якщо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ є різні між собою алгебраїчні числа, а $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ є довільні алгебраїчні числа, які не всі дорівнюють нулю одночасно, то рівність $\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + ... + \beta_n e^{\alpha_n} = 0$ неможлива (цей результат виражають, говорячи, що $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_n}$ при зазначених $\alpha_i$ лінійно незалежні над полем алгебраїчних чисел).

З цієї теореми легко довести трансцендентність чисел *e* і π. Справді, через те, що ціле раціональне число є окремим випадком алгебраїчного числа, то за теоремою Ліндемана співвідношення $a_0e^n + a_1e^{n-1} + ... + a_{n-1}e + a_ne^0 = 0, n \geq 1,$ де $a_0, a_1, ..., a_n$ – цілі числа, неможливе. Інакше кажучи, не може бути коренем жодного многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ степеня $n \geq 1$ з цілими коефіцієнтами, тобто *e* – трансцендентне.

Трансцендентність числа π тепер можна довести так. З відомої формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ при $\varphi = \pi$ виходить, що $e^{\pi i} = -1$, або $e^{\pi i} + e^0 = 0$. Звідси, за теоремою Ліндемана, дістанемо, що *πi*, а тому й π не може бути алгебраїчним, тобто π є трансцендентне.

З теореми Ліндемана, зокрема, випливають і такі твердження:

1) $e^{\alpha}$ трансцендентне для всякого алгебраїчного $\alpha \neq 0$;

2) натуральний логарифм всякого дійсного алгебраїчного числа (крім 1) є трансцендентним числом;

3) всяке відмінне від 1 число, що має раціональний натуральний логарифм, – трансцендентне;

4) $\sin\alpha, \cos\alpha$ і $tg\alpha$ є трансцендентними при дійсному алгебраїчному $\alpha \neq 0$.

Справді, щоб довести твердження (1), припустимо супротивне, тобто, що $e^{\alpha}$ – алгебраїчне, тоді воно має бути коренем деякого многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ степеня $n \geq 1$ з цілими коефіцієнтами, тобто мали б $a_0e^{\alpha n} + a_1e^{\alpha(n-1)} + ... + a_ne^0 = 0$.

Але ця рівність суперечить теоремі Ліндемана.

Щоб довести твердження (2), також припустимо супротивне, тобто що $\ln\alpha = \beta$ – алгебраїчне число, тоді $\alpha = e^{\beta}$ за тільки що доведеним має бути трансцендентним, але за умовою $\alpha$ – алгебраїчне.

3) Припустимо, що $\beta \neq 1$ – будь-яке дійсне число і $\ln\beta = \frac{m}{n}$ є раціональне число; тоді з рівності $\beta = e^{\frac{m}{n}}$ безпосередньо випливає трансцендентність числа $\beta$.

4) Доведемо трансцендентність у випадку дійсного алгебраїчного $\alpha \neq 0$. Припустимо супротивне, нехай $\sin\alpha = \beta$ – алгебраїчне число. Через те що $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, $\dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \beta$, звідси $(e^{i\alpha})^2 - 2i\beta e^{i\alpha} - 1 = 0$, тобто $e^{i\alpha}$ є коренем квадратного рівняння $x^2 - 2i\beta x - 1 = 0$ з алгебраїчними коефіцієнтами і тому за властивістю 2 алгебраїчних чисел $e^{i\alpha}$ має бути алгебраїчним. Але це неможливо, бо – алгебраїчне число, відмінне від нуля. Аналогічно доводиться трансцендентність $\cos\alpha$ і $tg\alpha$ при дійсному алгебраїчному $\alpha \neq 0$.

Ці результати протягом майже 50 років були єдиними, які стосувались арифметичної природи чисел.

У 1900 р. на Паризькому міжнародному математичному конгресі один з найвидатніших німецьких математиків Гільберт (1862 – 1943) вказав на 23 найважчі математичні проблеми, розв’язання яких істотно сприяло б дальшому розвитку математики. Серед цих проблем була проблема (*) про арифметичну природу чисел виду $\alpha^{\beta}$, де $\alpha$ – алгебраїчне число, відмінне від 0 і 1, а $\beta$ – алгебраїчне число, не нижче від другого степеня, тобто ірраціональне алгебраїчне число.

Довгий час цю проблему не могли розв’язати, і тільки в 1936 р. Гельфонд повністю розв’язав цю проблему, тобто довів таку теорему:

***Теорема Гельфонда***. Всяке число виду $\alpha^{\beta}$, де $\alpha$ – алгебраїчне число, відміне від 0 і 1, і $\beta$ – алгебраїчне число не нижче другого степеня, є число трансцендентне.

Методи, створені Гельфондом, дали змогу встановити і трансцендентність ряду інших чисел. Вони сприяють дальшому розвитку теорії трансцендентних чисел, яка є однією з найскладніших розділів математики.

Як наслідок з теореми Гельфонда випливає така важлива теорема, яку ще інтуїтивно сформулював Ейлер.

Логарифм алгебраїчного числа $\alpha \neq 0$ при алгебраїчній основі $\beta (0 \neq \beta \neq 1)$ є число трансцендентне, якщо $\alpha$ не дорівнює раціональному степеню основи, тобто $\alpha \neq \beta^{\frac{p}{q}}$, де $p$ і $q$ ($q > 0$) – цілі числа.

Частковим випадком цієї теореми є трансцендентність числа $a^{\sqrt[n]{b}}$, де $a > 1$ ціле, а $b$ ціле, відмінне від $n$-ого степеня. Трансцендентність $e^{\pi}$ так само є частковим випадком теореми Гельфонда, так як в теорії функцій комплексної змінної доводиться, що $e^{\pi} = (-1)^{-i}$.

З цієї теореми безпосередньо випливає, що десяткові логарифми всіх натуральних чисел $N \neq 10^{k}$ ($k$ – ціле число) є трансцендентні числа.

Цей факт має велике принципове значення. Десятковими логарифмами в науці і практиці користувалися понад 300 років, і тільки в 40-х роках минулого століття, завдяки блискучим успіхам радянської школи теорії чисел, удалось цілком розкрити арифметичну природу цього класу чисел і довести їх трансцендентність.

Так роботи Гельфонда та інших математиків, серед яких можна в першу чергу назвати Зігеля, Маллера, Шнейдера, Шидловського, в наступні роки істотно просунули теорію трансцендентних чисел. Разом з тим про багатьох величинах, які часто зустрічаються в математиці, ми до сих пір не можемо сказати, чи є вони трансцендентними або алгебраїчними. Так, наприклад, припускають, що ейлерева постійна С – трансцендентне число. Довести це поки не вдалося, і не спростована навіть можливість того, що С – раціональне число.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

2. Архангельская В. М. Элементарная теория чисел. – С.: Саратовский ун-т, 1963. – 253 с.

3. Бевз Г. П. Теорія чисел і теоретична арифметика. – К.: Радянська школа, 1963. – 210 с.

4. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. (3-е изд., доп.) М.: Наука, 1985.

5. Бородін О. І.  Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 274 с.

6. Бухштаб А. А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

7. Вейль А. Основы теории чисел. – М.: Мир, 1972. – 410 с.

8. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1965. – 122 с.

9. Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., Гостехиздат, – 1952.

10. Дринфельд Г.И. Трансцендентность чисел пи и е, – Харків, 1952. – 74 с.

11. Жуков А. В. Вездесущее число “пи”. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

12. Іванченко В. В. Задачник з теорії чисел. – К.: Радянська школа, 1958. – 345 с.

13. Фельдман Н., Алгебраические и трансцендентные числа. – Квант, № 7, – 1983.